Exámenes de Selectividad

Matemáticas. Andalucía 2023, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Análisis

Considera la función $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{f(x) = \frac{1}{e^x+e^{-x}}}$.

a) **Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

b) **Calcula $\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{x^2 f(x)}$.**

Solución:

a) **Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

Para estudiar extremos absolutos, derivamos la función:

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = (e^x + e^{-x})^{-1}.$$

Derivamos usando la regla de la potencia combinada con la de la cadena:

$$f'(x) = -1 \cdot (e^x + e^{-x})^{-2} \cdot (e^x - e^{-x}) = \frac{-(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x - e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Evaluamos el punto crítico y los límites:
- Límite cuando $x \to \pm\infty$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
- Valor en el punto crítico: $f(0) = \frac{1}{e^0+e^0} = \frac{1}{2}$.

Observamos que:
- En $x = 0$ hay un máximo absoluto: $f(0) = \frac{1}{2}$.
- El mínimo absoluto ocurre en los extremos del dominio: $f(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Máximo absoluto en } x = 0 \text{ con valor } \frac{1}{2}; \quad \text{mínimo absoluto en } x \to \pm\infty \text{ con valor } 0.}$$

b) **Calcula $\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{x^2 f(x)}$.**

Evaluamos el límite dado:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x + e^{-x}}.$$

Para $x \to +\infty$, el término dominante en el denominador es e^x, entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x + e^{-x}} \approx \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

Usando el criterio de crecimiento exponencial frente a polinómico:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{0}$$

Ejercicio 2. Análisis

Sea la función $\mathbf{f} : [-\mathbf{2}, \mathbf{2}] \to \mathbb{R}$, definida por $\mathbf{f(x) = x^3 - 2x + 5}$.

a) **Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-\mathbf{2}, \mathbf{f}(-\mathbf{2}))$ y $(\mathbf{2}, \mathbf{f}(\mathbf{2}))$.**

b) **Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.**

Solución:

a) **Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-\mathbf{2}, \mathbf{f}(-\mathbf{2}))$ y $(\mathbf{2}, \mathbf{f}(\mathbf{2}))$.**

Primero calculamos la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos dados:

$$m = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{(8 - 4 + 5) - (-8 + 4 + 5)}{4} = \frac{9 - 1}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Ahora calculamos la derivada para hallar la pendiente de la recta tangente:

$$f'(x) = 3x^2 - 2.$$

Igualamos la derivada a la pendiente de la secante para obtener los puntos buscados:

$$3x^2 - 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

b) **Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.**

Para encontrar el punto de inflexión, calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x.$$

Igualamos la segunda derivada a cero para hallar el punto de inflexión:

$$6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Evaluamos la función en este punto:

$$f(0) = 0^3 - 2(0) + 5 = 5.$$

El punto de inflexión es $(0, 5)$. Calculamos la pendiente de la recta tangente usando la primera derivada:

$$f'(0) = 3(0)^2 - 2 = -2.$$

Por tanto, la recta tangente es:

$$y - 5 = -2(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 5.$$

La recta normal es perpendicular a la tangente, con pendiente inversa y opuesta, es decir, pendiente $1/2$. Su ecuación es:

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{2} + 5.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Tangente: } y = -2x + 5, \quad \text{Normal: } y = \frac{x}{2} + 5}$$

Ejercicio 3. Análisis

Considera la función $\mathbf{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\mathbf{f(x) = x|x-1|}$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $\mathbf{x = 0}$.

Solución:

Primero, simplificamos la función por tramos debido al valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x < 1, \\ x(x-1), & x \geq 1. \end{cases}$$

Calculamos la recta tangente en $x = 0$. Para ello, necesitamos la derivada en dicho punto. Observamos la primera definición (válida en torno a 0):

$$f(x) = x - x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - 2x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1.$$

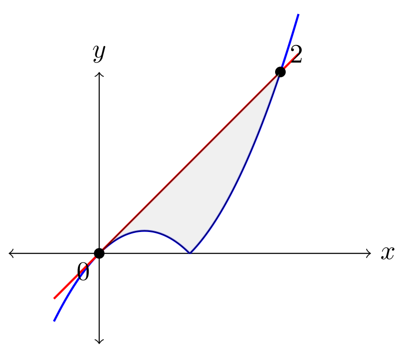
La recta tangente en $x = 0$ tiene pendiente 1 y pasa por el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = x.$$

Hallamos puntos de intersección entre la función y la recta tangente resolviendo $f(x) = x$:

- Si $x < 1$: $x - x^2 = x \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$
- Si $x \geq 1$: $x(x-1) = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$

Por tanto, los puntos de intersección son $x = 0$ y $x = 2$.



El área limitada por la gráfica y la recta tangente entre $x = 0$ y $x = 2$ es:

$$\text{Área} = \int_0^2 |f(x) - x| \, dx.$$

Separando la integral por tramos:

$$\text{Área} = \int_0^1 |(x - x^2) - x| \, dx + \int_1^2 |x(x-1) - x| \, dx.$$

Simplificamos:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 |-x^2| \, dx + \int_1^2 |x^2 - 2x| \, dx \\ &= \int_0^1 x^2 \, dx + \int_1^2 (2x - x^2) \, dx. \end{aligned}$$

Calculamos las integrales:

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + \left[(4 - \frac{8}{3}) - (1 - \frac{1}{3})\right] \\
&= \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1\ u^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es:

$$\boxed{\text{Área} = 1\ u^2}$$

Ejercicio 4. Análisis

Considera la función $\mathbf{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $\mathbf{F}(\mathbf{x})=\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}}\sin(\mathbf{t^2})\,\mathbf{dt}$. Calcula $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\mathbf{xF(x)}}{\sin(\mathbf{x^2})}$.

Solución:

Analizamos el límite dado:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xF(x)}{\sin(x^2)}.$$

Observamos que si sustituimos directamente, tenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$. Usaremos la regla de L'Hôpital para resolver el límite. Antes de ello, analizamos primero la derivada de la función integral $F(x)$, que por el teorema fundamental del cálculo es:

$$F'(x)=\sin(x^2)-\sin(0)=\sin(x^2).$$

Aplicando la regla de L'Hôpital, derivamos numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xF(x)}{\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(xF(x))'}{(\sin(x^2))'}.$$

Calculamos ambas derivadas:

$$\begin{aligned}(xF(x))'&=F(x)+xF'(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,dt+x\sin(x^2),\\(\sin(x^2))'&=2x\cos(x^2).\end{aligned}$$

Por tanto, el límite queda ahora:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin(t^2)\,dt+x\sin(x^2)}{2x\cos(x^2)}.$$

Evaluando directamente el límite, obtenemos de nuevo una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos una vez más la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)+\sin(x^2)+2x^2\cos(x^2)}{2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)}.$$

Ahora sí podemos evaluar directamente en $x=0$:

$$\frac{\sin(0)+\sin(0)+2\cdot 0^2\cos(0)}{2\cos(0)-4\cdot 0^2\sin(0)}=\frac{0+0+0}{2-0}=0.$$

Por tanto, la solución es:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{xF(x)}{\sin(x^2)}=0}$$

Ejercicio 5. Álgebra

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Solución:

Sean:

$$\begin{aligned} B &= \text{número de coches blancos vendidos}, \\ N &= \text{número de coches negros vendidos}, \\ R &= \text{número de coches rojos vendidos}, \\ T = B + N + R &= \text{número total de coches vendidos}. \end{aligned}$$

Según los datos del enunciado tenemos:

1. "El 60% de blancos más el 50% de negros representan el 30% de los coches vendidos":
$$0.6B + 0.5N = 0.3T.$$
2. "El 20% de blancos más el 60% de negros más el 60% de rojos representan la mitad de los coches vendidos":
$$0.2B + 0.6N + 0.6R = 0.5T.$$
3. "Se han vendido 100 coches negros más que blancos":
$$N = B + 100.$$

Además, la suma total es $T = B + N + R$. Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.6B + 0.5N & = 0.3(B + N + R), \\ 0.2B + 0.6N + 0.6R & = 0.5(B + N + R), \\ N & = B + 100. \end{cases}$$

Sustituimos la tercera ecuación en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0.6B + 0.5(B + 100) &= 0.3(B + (B + 100) + R), \\ 0.2B + 0.6(B + 100) + 0.6R &= 0.5(B + (B + 100) + R). \end{aligned}$$

Simplificamos cada ecuación:

$$\begin{aligned} 0.6B + 0.5B + 50 &= 0.3(2B + 100 + R), \\ 0.2B + 0.6B + 60 + 0.6R &= 0.5(2B + 100 + R). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.1B + 50 = 0.6B + 30 + 0.3R \quad &\Rightarrow \quad 0.5B - 0.3R = -20, \\ 0.8B + 60 + 0.6R = B + 50 + 0.5R \quad &\Rightarrow \quad -0.2B + 0.1R = -10. \end{aligned}$$

Ahora resolvemos este sistema simplificado:

$$\begin{cases} 0.5B - 0.3R = -20, \\ -0.2B + 0.1R = -10. \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 3:

$$\begin{cases} 0.5B - 0.3R = -20 \\ -0.6B + 0.3R = -30 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$-0.1B = -50 \quad \Rightarrow \quad B = 500.$$

Si $B = 500$, usando la ecuación $N = B + 100$, obtenemos:

$$N = 500 + 100 = 600.$$

Finalmente, calculamos R usando la primera ecuación simplificada:

$$0.5(500) - 0.3R = -20 \quad \Rightarrow \quad 250 - 0.3R = -20 \quad \Rightarrow \quad 0.3R = 270 \quad \Rightarrow \quad R = 900.$$

Por tanto, el número de coches vendidos de cada color es:

$$\boxed{B = 500, \quad N = 600, \quad R = 900}$$

Ejercicio 6. Álgebra

Considera las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A.**
b) **Para todo** $\mathbf{m \neq -1}$**, resuelve, si es posible, la ecuación** $\mathbf{AX + X = B}$**.**

Solución:

a) **Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A.**

Para que exista la inversa, el determinante de A debe ser distinto de 0:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix}.$$

Calculamos este determinante expandiendo por la primera fila:

$$\det(A) = 0 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{12} + m \cdot C_{13}.$$

El menor C_{13} es:

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} = (-1)^4(m \cdot m - 0) = m^2.$$

Por lo tanto, el determinante es:

$$\det(A) = m \cdot m^2 = m^3.$$

Para que exista la inversa, debe cumplirse $m^3 \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{m \neq 0}$$

b) **Para todo** $\mathbf{m \neq -1}$**, resuelve, si es posible, la ecuación** $\mathbf{AX + X = B}$**.**

La ecuación dada es:

$$AX + X = B \quad \Rightarrow \quad (A + I)X = B.$$

Primero calculamos $A + I$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación ahora es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que tenga solución única, el determinante de $(A + I)$ debe ser distinto de 0:

$$\det(A + I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0) - 0 + m(-m^2) = 1 - m^3.$$

Igualamos el determinante a 0:

$$1 - m^3 = 0 \Rightarrow m^3 = 1 \Rightarrow m = 1.$$

Entonces, si $m = 1$ no existe solución única. Como el problema pide resolver para $m \neq -1$ y no excluye $m = 1$, debemos aclarar:

- Si $m = 1$, no existe solución única.
- Si $m \neq 1$, existe solución única.

Supondremos $m \neq 1$ y resolvemos:

$$X = (A + I)^{-1}B.$$

La solución existe siempre que $m \neq 1$. El cálculo explícito de la inversa y multiplicación es extenso, pero la condición importante ya está dada. Ahora calculamos la matriz adjunta, cuyos elementos son los menores de cada elemento:

$$\text{Adj}(A+I) = \begin{pmatrix} 1 & -m^2 & m \\ -m & 1 & -m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m^2 & 1 & -m \\ m & -m^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, calculamos la inversa usando la fórmula:

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{\det(A+I)}\text{Adj}(A+I) = \frac{1}{1-m^3}\begin{pmatrix} 1 & -m^2 & m \\ -m & 1 & -m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, para $m \neq 1$, la solución es:

$$X = (A+I)^{-1}B = \frac{1}{1-m^3}\begin{pmatrix} 1 & -m^2 & m \\ -m & 1 & -m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-m^3}\begin{pmatrix} 1 & m & -m^2 \\ -m & -m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}.$$

Para $m = 1$, no existe solución única ya que el determinante de $A + I$ es cero.

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{X = \frac{1}{1-m^3}\begin{pmatrix} 1 & m & -m^2 \\ -m & -m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix} \quad (m \neq 1), \quad \text{no existe solución única si } m = 1}$$

Ejercicio 7. Geometría

El plano perpendicular al segmento de extremos $\mathbf{P(0,3,8)}$ y $\mathbf{Q(2,1,6)}$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

Solución:

Primero, hallamos el vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = (2-0,\ 1-3,\ 6-8) = (2,-2,-2).$$

El punto medio del segmento PQ es:

$$M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{8+6}{2}\right) = (1,2,7)\,.$$

La ecuación del plano perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ que pasa por M es:

$$2(x-1) - 2(y-2) - 2(z-7) = 0.$$

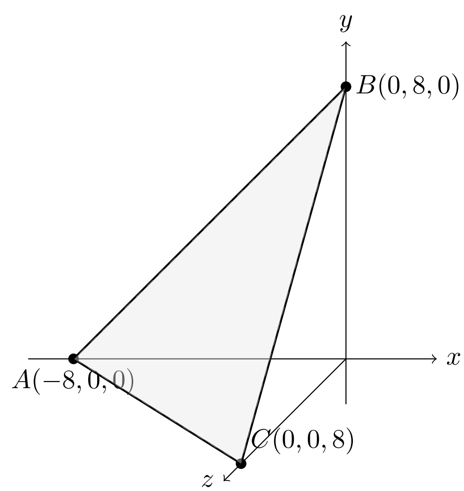
Simplificando:

$$2x - 2 - 2y + 4 - 2z + 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y - z + 8 = 0.$$

Calculamos los puntos de intersección con los ejes:

- Con el eje OX: $y = z = 0 \Rightarrow x = -8$, punto $A = (-8,0,0)$.
- Con el eje OY: $x = z = 0 \Rightarrow y = 8$, punto $B = (0,8,0)$.
- Con el eje OZ: $x = y = 0 \Rightarrow z = 8$, punto $C = (0,0,8)$.

Los puntos del triángulo son $A = (-8,0,0)$, $B = (0,8,0)$ y $C = (0,0,8)$.



El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

$$\overrightarrow{AB} = (8,8,0), \quad \overrightarrow{AC} = (8,0,8).$$

Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \vec{i}(64) - \vec{j}(64) + \vec{k}(-64) = (64,-64,-64).$$

El área es la mitad del módulo de este vector:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{64^2 + (-64)^2 + (-64)^2} = 32\sqrt{3}\ u^2.$$

Por tanto, la solución es:

$$\boxed{32\sqrt{3}\ u^2}$$

Ejercicio 8. Geometría

Considera el punto A$(-1, 1, 3)$ y la recta r determinada por los puntos B$(2, 1, 1)$ y C$(0, 1, -1)$.

a) **Halla la distancia del punto A a la recta r.**
b) **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.**

Solución:

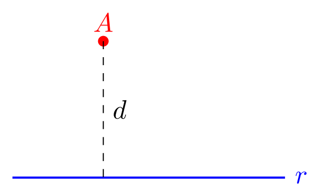
a) **Halla la distancia del punto A a la recta r.**

La recta r pasa por $B(2, 1, 1)$ y tiene dirección:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0-2, 1-1, -1-1) = (-2, 0, -2).$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ es:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2+1, 1-1, 1-3) = (3, 0, -2).$$



La distancia del punto A a la recta r es:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}.$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0, 10, 0).$$

Luego,

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = 10.$$

El módulo de $\overrightarrow{BC}$ es:

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Por tanto,

$$d = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ u.$$

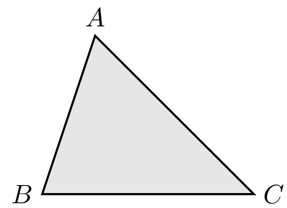
Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}\ u}$$

b) **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.**

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$



Calculamos $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0+1, 1-1, -1-3) = (1, 0, -4).$$

Ahora calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (0, 10, 0).$$

Entonces, el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2}|(0, 10, 0)| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5\ u^2.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{5\ u^2}$$